משפט

$IS \in NPC$

תזכורת

IS - בעיית הקבוצה הבלתי תלויה:
$IS = \{(G,k) \big| k$ יש קבוצה בלתי תלויה בגודל Gב$\}$
קבוצה בלתי תלויה היא קבוצה שאין קשתות בין קודקודיה.

הוכחת המשפט

$IS \in NP$: בהנתן פתרון, ניתן לבדוק בזמן פולינומי שהוא אכן קבוצה בגודל k שהינה ב"ת.

$IS \in NPH$: ברדוקציה מSAT. אבל נשתמש ב$3-SAT$:
$3-SAT = \{\psi \big| \psi$ ספיקה $3-CNF$ בצורת $\psi\}$. לדוגמה

$$\underbrace{(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3)}_{C_1} \wedge \underbrace{(\overline{x}_1 \vee x_3 \vee \overline{x}_4)}_{C_2} \wedge \underbrace{(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)}_{C_3} \wedge \underbrace{(x_3 \vee \overline{x}_4 \vee x_2)}_{C_4}$$

יהיו $x_1, ...x_n$ המשתנים בψ ו$C_1, ...C_m$ הפסוקיות בψ. נבנה את הגרף G:

קודקודי הגרף: לכל פסוקית C_i ולכל ליטרל k_{ij} בC_i יהיה קודקוד מתאים לk_{ij}

הקשתות: שני סוגי קשתות:

קשתות פסוקיות: (קשתות כחולות) נחבר את שלושת הליטרלים של פסקיות במשולש.

קשתות משתנים: (קשתות אדומות) לכל משתנה x_i ולכל מופעים x_i ו$\overline{x}_i$ נשים קשת בין x_i ל$\overline{x_i}$

נראה שלψ הצבה מספק אם"ם בG קבוצה ב"ת בגודל k. נניח $S : \{x_1, ...x_n\} \to \{T, F\}$ הצבה מספקת לψ. נבנה קבוצה ב"ת A בG, $|A| = k$.
S הצבה מספק לψ, כלומר לכל C_i ישנו ליטרל $l_{ij} \in C_i$ כך ש$S(l_{ij}) = T$.
נבחר את l_{ij} לקבוצה A. ע"פ בנייה $|A| = k$(כי לקחנו משתנה לכל פסוקית ו$k = m$) נותר להראות שA ב"ת. ואכן בA אין קשתות כחולות - כי לקחנו קודקוד בודד מכל משולש כחול(=פסוקית).

אין קשתות אדומות

נסתכל ב$A \ni l_{ij}$, $A \in l_{i'j'}$. כיוון ש$S(l_{ij}) = T$ ו$S(l_{i'j'}) = T$ לא ייתכן שl_{ij} הינו שלילת $l_{i'j'}$. לכן אין קשת אדומה ביניהם

מצד שני

נניח A קבוצה ב"ת בגודל k בG. נבנה S הצבה מספקת לψ. נניח $l_{ij} \in$ A(ליטרל של C_i)

- אם $l_{ij} = x_t$ אז נקבע $S(x_t) = T$
- אם $l_{ij} = \overline{x}_t$ אז נקבע $S(x_t) = F$
- ומשתנים שלא נקבעו בצורה זו יקבלו ערך כלשהו(נניח T)

נשים לב שS מוגדרת היטב, כיוון שבA אין ליטרלים שמתאימים למשתנה ושלילתו. S מספקת כי בכל פסוקית C_i הליטרל l_{ij} מקבל ערך T ובפרט C_i מקבל ערך T ולכן גם כל ψ מסופק. ■

צביעת גרף

צביעה חוקית של גרף היא צביעה שבה אין קודקודים באותו צבע שיש קשת ביניהם.

$Color = \{(G,k) \mid$ יש צביעה של G בk צבעים$\}$

נשים לב שכל צבע מהווה קבוצה בלתי תלויה - לכן בעיית הצביעה בעצם שואלת אם ניתן לכסות את הגרף בk קבוצות בלתי תלויות.

$3-Color = \{G \mid$ יש צביעה של G ב3 צבעים$\}$

ניתן לבנות בקלות רדוקציה פולינומית מ$Color$ ל$3-Color$:

$$3-Color \leq^p Color$$

$$(G,3) \in Color \Rightarrow G \in 3-Color$$

משפט

$$NPC \ni 3-Color$$

הוכחה

$NP \ni 3-Color$: ננחש\נקבל צביעה ונקבדו שאכן תקינה.

$NPH \ni 3-Color$

ברדוקציה מ$3-SAT$:

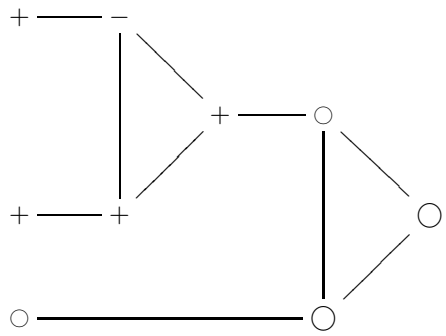
רוצים: בהינתן נוסחא ψ(בצורת $3-CNF$) לבנות גרף G כך שψ ספיקה אם"ם לG 3-צביעה.

יהיו $x_1, ...x_n$ המשתנים ו$C_1, ...C_m$ הפסוקיות בψ. לכל משתנה x_i ושלילתו $\overline{x}_i$ יהיה קודקוד בG. בנוסף 3 קודקודים מיוחדים B, F, T מחוברים במשולש.

כמו כן לכל i x_i, $\overline{x}_i$ וB מחוברים במשולש.

נבנה חפיץ(Gadget) שהינו גרף עם 3 "כניסות" ו"יציאה" אחת, כך שהיציאה יכולה להיצבע בצבע T אם"ם לפחות אחת מהכניסות אינה קבוצע בF(כלומר צבועה בT)

החפיץ נותן לנו שיציאה יכולה להיצבע בירוק אם ורק אם לפחות אחת הכניסות ירוקה(+). אם כל היציאות אדומות(-), היציאה חייבת להצבע באדום:

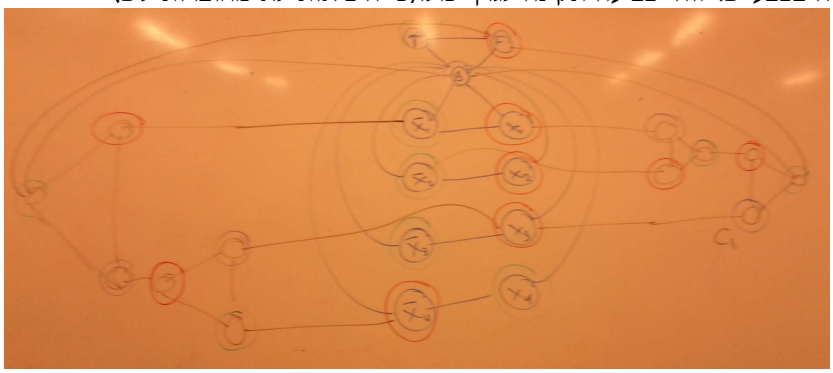


מתקיים

אם לψ הצבה מספקת S נבנה צביעה לG ב3 צבעים.

לF, T, B ניתן את הצבעים F, T, B בהתאמה. לכל משתנה x_i ניתן לקודקוד x_i את הצבע $S(x_i)$ ולקודקוד $\overline{x}_i$ $S(\overline{x}_i)$.

כיוון שS הצבה מספקת בכל פסוקית לפחות אחד הליטרלים מקבל ערך T, ולכן גם בכל חפיץ לפחות אחת מהכניסות צבועה בצבע T $\Leftarrow$ ניתן לצבוע את החפיץ כולו כך שהיציאה תהיה בצבע T. זוהי צביעה תקינה לגרף כולו(כי היציאות לא מחוברות לT)



בכיוון השני

נניח צביעה של G בשלושה צבעים. נראה הצבה מספקת S לψ

ההצבה

בה"כ הצבעים של F,T,B הינם F,T,B בהתאמה. לכל x_i אם x_i צבוע T אזי $S(x_i)=T$.
אם x_i צבוע T אזי $S(x_i)=F$. לא ייתכן שx_i צבוע B(כי מחובר לB).
נשים לב שבהכרח לכל i הצבע של $\overline{x}_i$ הינו הערך של $\overline{x}_i$ לפי ההשמה.
נסתכל בפסוקית C_j ונראה שC_j מסופקת. כלומר ישנו ליטרל בC_j שמקבל ערך T.
נסתכל בחפיץ שמתאים C_j. הכניסות לחפיץ הינם הליטרלים של C_j. כיוון שהצביעה חוקית בהכרח היציאה של החפיץ צבועה בT $\Leftarrow$ לפחות אחת הכניסות צבועה בT, כנדרש. ■

$IS=\{(G,k)\,|\,k$ קבוצה ב"ת בגודל Gב$\}$.
$3-IS\leq^p IS$, ואת $3-IS$ ניתן לפתור בזמן פולינומי:

$$\binom{n}{3}<n^3\leq O\left(|G|^3\right)$$

$58-VC=\{G|58\geq$ בגודל VC ישנו Gב$\}$ גם פולינומית:

$$n^{58}$$

מעגל המילטוני

משפט

בעיית המעגל ההמילטוני בגרף מכוון הינה NPC

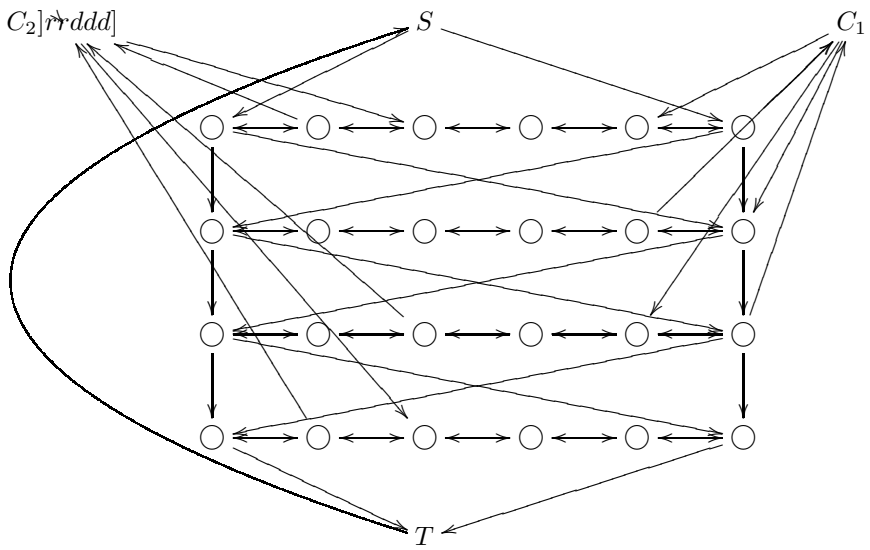
הוכחה

$NP\ni D-HAM$: ננחש מעגל ונבדוק.

$NPH\ni D-HAM$**:**

ברדוקציה מ$3-SAT$. כלומר רוצים בהנתן נוסחא ψ לבנות גרף מכוון G כך שψ ספיקה אם"ם בG מעגל מכוון.
יהיו $x_1,...x_n$ המשתנים בψ ו$C_1,...C_n$ הפסוקיות בψ.

לכל שורה של קודקודים ניצור שורה של קודקודים באורך $3m$:



אם יש הצבה מספקת יש מעגל המילטוני(S מT ל), ואם יש מעגל המילטוני נסתכל באיזה כיוונים אנו מכסים את כל הקודקודים, וזה נותן הצבה מספקת.